Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos

Fábio Marson Ferreira e Walter Spinelli
Professores do Colégio Móbile, São Paulo

Recentemente nos desafiamos a enriquecer a discussão do conteúdo relativo aos determinantes, que ministrávamos para as classes de ensino médio do colégio em que lecionamos, buscando exemplos significativos para a apresentação das suas propriedades.

Com esse intuito, propusemos a exploração de quatro propriedades dos determinantes a partir do uso da fórmula do cálculo da área de um triângulo cujos vértices são pontos localizados sobre o plano cartesiano, o que deverá servir de ilustração da proposta de trabalho adotada. Ficará por conta do leitor a investigação e descoberta de caminhos para a exploração de outras propriedades dos determinantes.

Fórmula para o cálculo da área de um triângulo e convenção de notação

Para determinar a área de um triângulo ABC, localizado sobre o plano cartesiano, e cujos vértices são os pontos $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ e $C=(x_C, y_C)$, pode-se fazer:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\det S|, \text{ com } S=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^{(*)}.$$

(*) A fórmula para o cálculo da área de um triângulo envolve o valor absoluto de um determinante. Para simplificar, adotaremos neste artigo uma notação que omite o módulo do determinante, porém, nos cálculos, levaremos sempre em consideração o valor absoluto do determinante.

Sendo assim, para cada propriedade que analisarmos, apresentaremos um exemplo do cálculo da área de um triângulo na situação correspondente. Nesse percurso, observaremos as transformações sofridas, tanto na matriz S, quanto nas posições dos vértices dos respectivos triângulos no plano cartesiano.

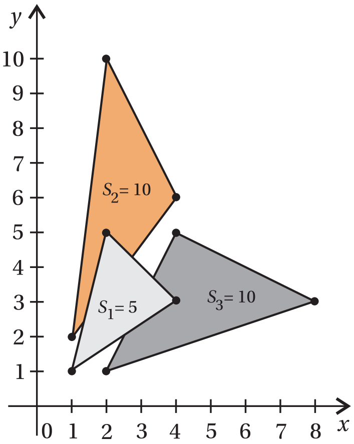
Qualquer transformação que altere a terceira coluna da matriz S não se presta aos nossos propósitos, já que essa coluna deve sempre ter elementos unitários de acordo com a fórmula de cálculo da área de triângulo. Nesse sentido, propriedades dos determinantes que mantêm relação com alguma modificação na terceira coluna da matriz S, como, por exemplo, a da matriz transposta que possui determinante igual ao da matriz original, não têm interesse no tipo de investigação que faremos. Em algumas das propriedades que analisaremos, a transformação só será pertinente sob alguns aspectos específicos, que procuraremos explicitar.

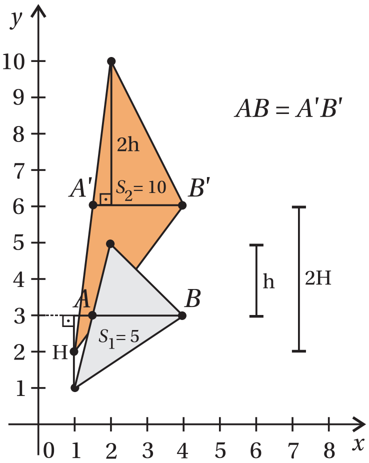
1ª propriedade: Se os elementos de uma fila qualquer de uma matriz A, com determinante D, forem multiplicados por um número k, o determinante da nova matriz B será o produto de $k.D$, ou seja, $\det B = k \det A$.

Como ilustração, vamos calcular os determinantes de três matrizes, sendo que a segunda e a terceira matrizes tiveram uma de suas colunas multiplicada por um fator k, nesse caso igual a 2.

Observe o cálculo das áreas dos triângulos pelos determinantes correspondentes e a figura:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$





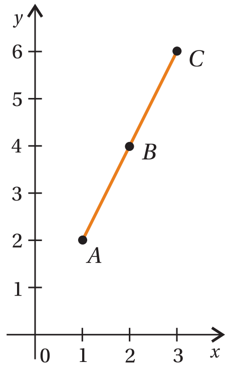
No caso da comparação entre os triângulos de áreas S_1 e S_2, note que as abscissas dos vértices se preservaram e as ordenadas dobraram. Com uma decomposição dos triângulos por um segmento paralelo ao eixo x fica fácil verificar que suas áreas irão dobrar porque a altura dos triângulos obtidos na decomposição irá dobrar (com base preservada), já que a altura está diretamente relacionada com a modificação das ordenadas.

2ª propriedade: Se uma matriz quadrada A possuir duas filas (linhas ou colunas) com elementos proporcionais, então o determinante dessa matriz será nulo, ou seja, $\det(A) = 0$.

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

O determinante exemplificado ao lado, com duas colunas de elementos proporcionais, é nulo. De fato, os pontos considerados para os vértices do triângulo são pontos alinhados, pertencentes à reta de equação $y = 2x$.

Quaisquer conjuntos de pontos que tenham suas coordenadas x e y proporcionais, estarão alinhados, sendo nula, portanto, a área do triângulo de vértices em três pontos nessa condição.



Também é possível observar que três pontos alinhados horizontalmente ou verticalmente implicarão uma primeira ou segunda coluna da matriz com elementos iguais e, portanto, proporcionais à terceira coluna da matriz.

3ª propriedade: O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal dessa matriz.

Essa é uma situação interessante: uma matriz triangular tem os elementos $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$. Pela propriedade, seu determinante é obtido pelo produto dos elementos da diagonal principal. Observemos os três determinantes a seguir e os triângulos gerados a partir das suas matrizes.

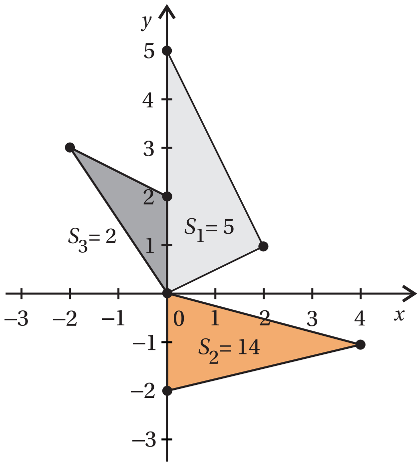
$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como consequência das características da matriz diagonal, teremos triângulos nos quais:

i. Um dos vértices é o ponto $(0, 0)$ e outro tem coordenadas $(0, y)$, o que implica dizer que um dos lados do triângulo terá medida igual ao valor absoluto de a_{22}.

ii. A altura relativa à base de medida $|a_{22}|$ dos triângulos terá medida igual ao valor absoluto de a_{11}.

iii. Como $a_{33} = 1$ nos três casos, o módulo dos determinantes corresponderá ao produto $|a_{11}|\,|a_{22}|\,a_{33}$, que é o dobro da área dos triângulos correspondentes. Ao multiplicarmos esse número por 1/2 na fórmula, encontraremos como resultado as áreas dos triângulos.



4ª propriedade: Se trocarmos entre si a posição de duas filas (linhas ou colunas) de uma matriz, o valor do determinante da matriz obtida após a troca será o oposto do valor do determinante da matriz inicial.

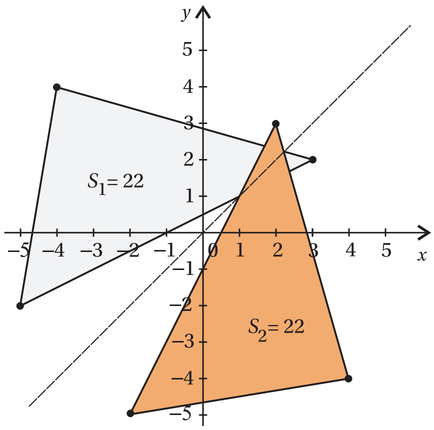
Quando trocamos as posições de duas filas de uma matriz e calculamos o determinante, o resultado é um valor oposto ao do primeiro determinante. Para o cálculo da área do triângulo, isso não faz diferença, já que calculamos o módulo do determinante. Porém, em termos geométricos, trata-se de dois triângulos congruentes e, portanto, de mesma área. Vamos averiguar.

Se trocarmos as posições de duas linhas da matriz, o triângulo formado continua o mesmo. Mas, se trocarmos as duas primeiras colunas (lembre-se que não podemos mexer na terceira coluna, que deve se manter com seus elementos iguais a um), trocamos, em cada ponto, a abscissa pela ordenada, e vice-versa.

Observemos os cálculos das áreas de dois triângulos nessa condição em um exemplo:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Temos dois triângulos iguais, sendo que o triângulo S_2 foi obtido pela reflexão de S_1 em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Suas áreas são iguais e, portanto, o módulo dos determinantes correspondentes tem o mesmo valor.



Ao leitor, fica a sugestão de procurar exemplos que ilustrem outras duas propriedades dos determinantes que podem ser investigadas pelo método que estamos propondo. São elas:

Se uma matriz quadrada A possuir uma fila nula, então o determinante dessa matriz será nulo, ou seja, $\det(A) = 0$.

Se uma matriz quadrada A possuir duas filas (linhas ou colunas) iguais, então o determinante dessa matriz será nulo, ou seja, $\det(A) = 0$.