MÉDIAS E PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

FERNANDO HENRIQUE ANTUNES DE ARAÚJO

Os problemas de otimização caracterizam-se por não mostrarem em seu enunciado a função a ser otimizada, fazendo com que o aluno ponha em evidência conhecimentos prévios e a habilidade de resolver situações-problema.

Nos cursos superiores de Matemática, problemas de otimização costumam ser resolvidos com o uso do cálculo diferencial. No contexto de ensino médio, a maioria dos problemas de otimização conduz a uma função polinomial do segundo grau, mas é claro que há uma ampla gama de problemas elementares que não se enquadram nessa simplificação.

No entanto, mesmo no ensino médio podem ser tratadas situações relativas a otimização que normalmente só seriam abordadas no ensino superior, pois a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica mostra-se eficiente na resolução de tais problemas.

A desigualdade das médias é o teorema que diz que, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então sua média geométrica não supera sua média aritmética, isto é:

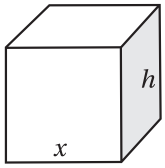
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

E mais: a igualdade só ocorre quando todos os números forem iguais, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. O leitor interessado pode consultar várias demonstrações dessa desigualdade para dois números em [3], onde também há um esboço da demonstração geral para n números, ou ainda na própria RPM [4]. Em [1] e [2], podem-se encontrar diferentes demonstrações que não usam Cálculo, para n números.

Vejamos agora alguns exemplos de problemas de otimização e suas soluções utilizando a desigualdade em questão:

Problema 1

Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.



Solução: Seja A a área da superfície e V o volume da caixa. Se h é a altura da caixa, temos $A = x^2 + 4xh = 1200$ e $V = x^2 h$. Aplicando a desigualdade entre as médias em A:

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 2xh 2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}.$$

Logo, $4V^2 \leq 400^3$ ou $V \leq 4000$.

Esse resultado nos diz que o volume é menor ou igual a 4000 cm^3, e o volume será máximo se, e quando, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos forem iguais, $x^2 = 2xh$. Resolvendo o sistema

$\begin{cases} x^2 = 2xh \\ x^2 + 4xh = 1200 \end{cases}$ obtemos $x = 20$ cm e $h = 10$ cm e constata-se que, de fato, ocorre o valor máximo, $V = 4000 cm^3$, para esses valores.

Problema 2

Se uma lata de zinco de volume 16π cm^3 deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.

Solução: Seja r o raio da base, h a altura e S a área da superfície total do cilindro. Então, temos $r^2h = 16$ e $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Usando a desigualdade das médias em S, obtemos

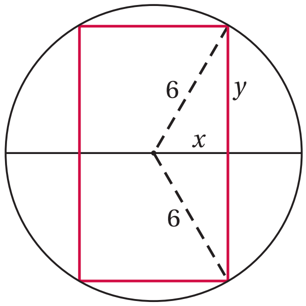
$$\frac{S}{3} = \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh \pi rh 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2h)^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (16)^2} = \sqrt[3]{2^9 \pi^3} = 8\pi.$$

Ou seja, $S \geq 24\pi$ e S será mínima se, e quando, a igualdade ocorrer, isto é, quando $\pi rh = 2\pi r^2$. Resolvendo o sistema

$\begin{cases} \pi rh = 2\pi r^2 \\ r^2 h = 16 \end{cases}$ obtemos $h = 4$ cm e $r = 2$ cm e constata-se que, de fato, o mínimo para S, $S = 8\pi\ \text{cm}^2$, ocorre para esses valores.

Problema 3

Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio 6 m.



Solução: A figura ao lado mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Se S é a área lateral do cilindro, temos $S = 4\pi xy$ com $x^2 + y^2 = 36$. Aplicando a desigualdade das médias, podemos escrever

$$\frac{36}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy = \frac{S}{4\pi},$$

ou $S \leq 72\pi$.

A área lateral do cilindro é então menor ou igual a $72\pi\ \text{m}^2$ e será máxima quando, e se, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos forem iguais, isto é, $x^2 = y^2$. Agora basta resolver o sistema

$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$, obtendo $x = y = 3\sqrt{2}$ m.

O leitor deve ter observado que, em cada problema específico, é necessário um pouco de prática para descobrir quais são os termos que devem formar a desigualdade das médias a ser aplicada.

Referências bibliográficas

[1] Carneiro, J.P. *A poderosa desigualdade das médias.* Revista da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº 36, abril de 1997.

[2] Lima, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias.* Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[3] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio,* volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

[4] RPM 18. *Duas médias*, Eduardo Wagner, 1991.