artigo

SOBRE MÉTODOS DE OBTENÇÃO DO VOLUME DE TORAS DE MADEIRA

Renata Zotin Gomes de Oliveira
Calixto Garcia

INTRODUÇÃO

O processo de obtenção do volume de toras de madeira, também conhecido por cubagem, envolve várias dificuldades, essencialmente devido às tomadas de medidas e à forma do material em questão. Sabe-se que o volume de uma tora pode ser obtido com boa fidelidade se a mergulharmos em água e, após aguardar o seu encharcamento, anotarmos o volume de água por ela deslocado (método conhecido por xilometria). Mas esse método, além de pouco prático, é inviável se aplicado em árvores ainda não cortadas.

Apresentamos neste texto alguns métodos alternativos (e clássicos) de cubagem de toras e algumas comparações entre eles, assim como sugestões de discussões com os alunos do ensino básico.

Esse tema foi objeto de estudo na disciplina Modelagem Matemática, do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), visando sua aplicação no ensino de Geometria para alunos do ensino médio.

A CUBAGEM DE TORAS

Além do diâmetro e do comprimento, que aqui consideraremos, outros parâmetros podem ser utilizados no cálculo do volume de toras de madeira, tais

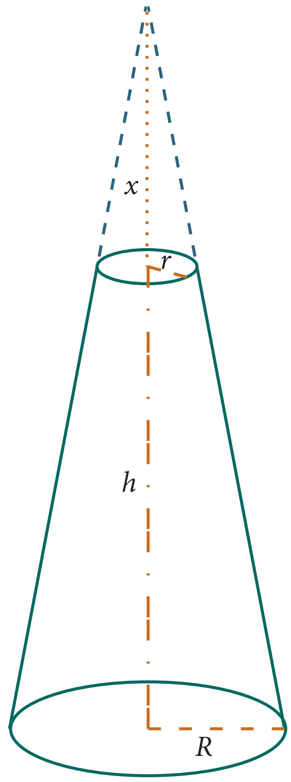

figura 1

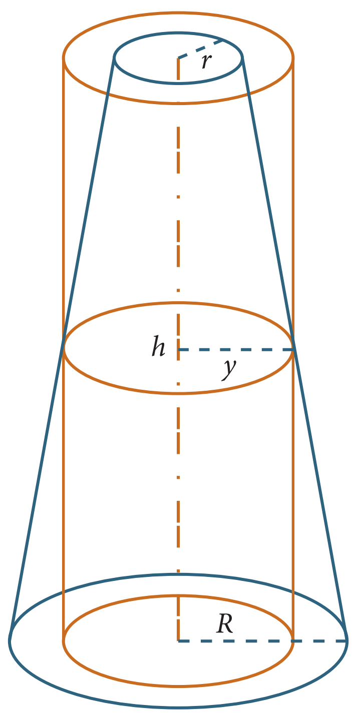

figura 2

como o *quociente de forma* (razão entre o diâmetro em algum ponto da tora, acima da altura do peito de um homem mediano (1,3 m) e o diâmetro nessa altura) e as *funções de afunilamento* (cujos gráficos se ajustam ao perfil de árvores de cada espécie).

MÉTODOS USUAIS DE CUBAGEM

1. MÉTODO GEOMÉTRICO

Com a forma muito próxima de um cilindro, o volume de um tronco de árvore é obtido pela fórmula

$$V = \frac{\pi \cdot h}{4} \cdot d^2 ,$$

sendo d o diâmetro e h o comprimento.

No caso de a tora ter a forma próxima de um cone truncado, com raio da base maior R, raio da base menor r e com comprimento h, o cálculo do volume constitui-se em proveitosa tarefa para alunos do ensino básico.

Observando a figura 1, sendo V_T o volume do tronco do cone, V_C o volume do cone de raio R e V_c o volume do cone de raio r, escrevemos:

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R} ,$$

$$x = \frac{r \cdot h}{R-r}$$

$$h + x = h + \frac{r \cdot h}{R-r} ,$$

$$h + x = \frac{R \cdot h}{R-r} .$$

$$V_T = V_C - V_c = \frac{\pi R^2 Rh}{3(R-r)} - \frac{\pi r^2 rh}{3(R-r)} = \frac{\pi h(R^3 - r^3)}{3(R-r)}$$

$$V_T = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2). \qquad (1)$$

Podemos exprimir (1) em função do comprimento h e das áreas do topo A_t e da base A_b "distribuindo" π nessa expressão. Notando que

$$\pi Rr = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \sqrt{A_t A_b}\,,\ \text{temos:}$$

$$V_T = \frac{h}{3}(A_t + \sqrt{A_t A_b} + A_b).$$

Sendo $d = 2r$ e $D = 2R$ os diâmetros das seções, a fórmula (1) é também escrita como:

$$V_T = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2).$$

OBSERVAÇÃO I

É oportuno salientar ao aluno que V_T é maior que o volume do cilindro reto com comprimento h e com base sendo a base média do tronco do cone (veja figura 2).

De fato, sendo y o raio do referido cilindro, vemos que é também base média do trapézio retângulo de bases r e R (com $r < R$) e, portanto, seu volume é:

$$V_{Cl} = \pi h \frac{(R+r)^2}{2^2} = \frac{\pi h}{16}(D+d)^2. \qquad (2)$$

Logo, a diferença entre (1) e (2) é:

$$V_T - V_{Cl} = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2) - \frac{\pi h}{16}(D+d)^2$$
$$= \frac{\pi h}{48}(D-d)^2 > 0,$$

significando que $V_T > V_{Cl}$.

2. MÉTODOS DE SMALIAN, HUBBER, NEWTON E FRANKON

Sabemos que a área do círculo, em função do diâmetro, é dada por $A = \frac{\pi d^2}{4}$.

Para toras com formas não tão irregulares, é comum considerar a área da seção equivalente à de um círculo cujo diâmetro é a média aritmética entre duas distâncias nessa seção, tomadas da seguinte maneira: estabelecida a maior distância entre dois pontos diametralmente opostos da tora, é determinada a menor distância como medida da mediatriz do segmento com extremidades nesses pontos (figura 3).

Sendo d_1 e d_2 tais distâncias, a área adotada da seção é expressa por

$$A_1 = \frac{\pi}{16}(d_1 + d_2)^2.$$

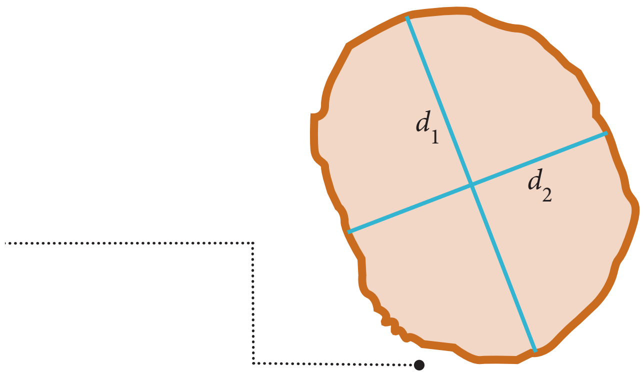

figura 3

Também é comum considerar a área da seção equivalente à de um círculo, agora aceitando como diâmetro a média geométrica das referidas distâncias, no caso de seções praticamente elípticas. Assim, a área da seção é expressa por

$$A_2 = \frac{\pi}{4} d_1 d_2.$$

Observemos que $A_1 \geq A_2$. De fato:

$$A_1 - A_2 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(d_1 + d_2)^2}{4} - d_1 d_2\right] =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{d_1{}^2 + 2d_1 d_2 + d_2{}^2}{4} - d_1 d_2) =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{d_1{}^2 - 2d_1 d_2 + d_2{}^2}{4} - d_1 d_2) =$$

$$\frac{\pi}{16}(d_1 - d_2)^2 \geq 0.$$

Os métodos que serão apresentados a seguir são conhecidos como métodos clássicos de cubagem de toras de madeira, onde a área de seções transversais é calculada conforme o exposto.

3. MÉTODO DE SMALIAN

Este é o método de cubagem adotado pelo IBAMA (Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis). É vastamente utilizado no meio florestal, sendo indicado para toras que apresentam forma de tronco de paraboloide (ver figura 4).

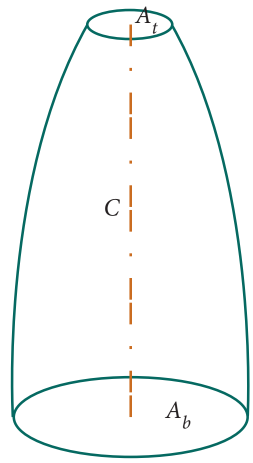

figura 4

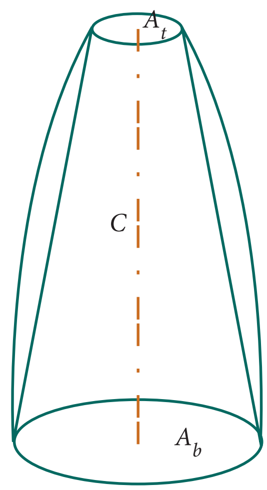

figura 4A

O volume por esse método é dado pelo produto do comprimento c da tora e a média aritmética das áreas A_t e A_b das seções nas suas extremidades. Escrevemos então

$$V_S = \frac{A_t + A_b}{2} c.$$

O leitor pode observar na figura 4A que

$$V_S > V_T.$$

4. MÉTODO DE HUBER

Por este método assume-se que uma tora é equivalente a um cilindro com mesmo comprimento c e com área de base igual à área de seção mediana. Pondo A_m para a área dessa seção, temos

$$V = A_m c.$$

Um inconveniente desse método é a impossibilidade de tomada da medida do diâmetro no ponto médio da tora se esta se encontra em uma pilha.

Para toras com a forma de tronco de cone (ver observação 1), como a área mediana é dada por

$$A_m = \frac{\pi}{4}(R+r)^2,$$

podemos reescrevê-la como:

$$A_m = \frac{A_t + 2\sqrt{A_t A_b} + A_b}{4}.$$

Com isso, a fórmula do volume pelo método de Huber para toras com essa forma é

$$V_H = \frac{A_t + 2\sqrt{A_t A_b} + A_b}{4} c.$$

5. MÉTODO DE NEWTON

A fórmula de Newton,

$$V_N = \frac{A_t + 4A_m + A_b}{6} c,$$

é tal que coincide com a fórmula pelo método geométrico para toras com a forma de tronco de cone.

De fato, como

$$A_m = \frac{A_t + 2\sqrt{A_t A_b} + A_b}{4},$$

tem-se

$$\frac{A_t + 4A_m + A_b}{6} c = \frac{(2A_t + 2\sqrt{A_t A_b} + 2A_b)c}{6}$$
$$= \frac{(A_t + \sqrt{A_t A_b} + A_b)c}{3}.$$

6. MÉTODO DE FRANKON

É o adotado pelas madeireiras. Em alegação às perdas no processo de pré-produção na transformação em subprodutos, é considerado o volume de um cilindro tomando como base a seção da extremidade com menor área.

A figura 5 ilustra essa situação, em que o volume é dado por

$$V = \pi r^2 c = \frac{\pi c}{4} d^2,$$

sendo d o diâmetro da extremidade menor, ou, ainda, por $V_F = A_t c$.

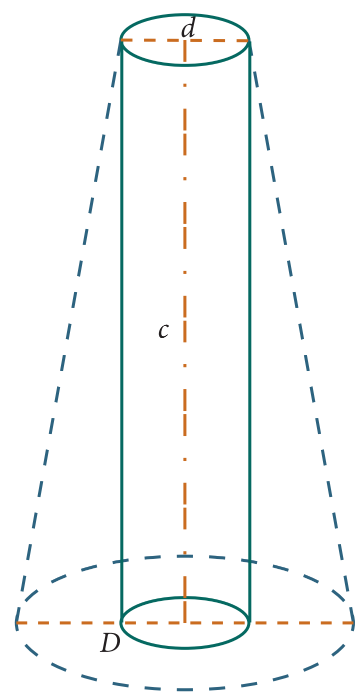

figura 5

COMPARAÇÃO ENTRE MEDIDAS DE VOLUMES PELOS MÉTODOS DE CUBAGEM

A tabela seguinte refere-se a duas toras de 20 m de comprimento com afunilamentos diferentes.

	At = 0,04 m² Ab = 0,3 m²	At = 0,2 m² Ab = 0,25 m²
Métodos	V(m³)	V(m³)
Smalian	3,4	4,5
Huber	2,795	4,486
Newton	2,997	4,491
Frankon	0,8	4

SUGESTÕES

É um bom exercício para o aluno do ensino básico deduzir as fórmulas apresentadas no texto, bem como tomar medidas e completar a tabela proposta. Devem constatar que os erros ali verificados estão relacionados com o grau de afunilamento das toras. Se, por um lado, podem ser controlados pela distância entre os cortes nas toras, por outro lado, devem ser minimizados quando se desejar obter subprodutos longos.

Após o estudo da geometria envolvida, é interessante a discussão com os alunos sobre a precisão dos volumes calculados pelos diferentes métodos. Moldes em miniatura subsidiam sobremaneira essa investigação. Uma coleta de dados pode-se dar, por exemplo, com as árvores da própria escola, pelo caule principal apenas, em nome da praticidade e da segurança.

Uma sequência que se pode dar a esse início de discussão é a questão do reflorestamento. Há também muita Matemática envolvida nesse tema.

REFERÊNCIAS

[1] Lima, Elon L. *Medida e Forma em Geometria*. C. P. M., 2009.

[2] Scolforo, José Roberto Soares. *Biometria Florestal: medição e volumetria das árvores*. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998.

[3] Burton, D.M. *The History of Mathematics: An Introduction*, 7th. Ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

[4] Ministério do Meio Ambiente. Serviço Florestal Brasileiro. *Guia para Medição de Produtos e Subprodutos Florestais Madeireiros das Concessões Florestais*. Brasília, 2012.