

seção

PROJETO KLEIN DE MATEMÁTICA EM LÍNGUA PORTUGUESA



O Projeto Klein é uma iniciativa internacional, promovida pelo ICMI, que é o órgão da União Matemática Internacional que se dedica às questões ligadas ao ensino da Matemática. No Brasil, o Projeto é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, em parceria com a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional e a Sociedade Brasileira de História da Matemática.

O objetivo do projeto, inspirado nas ideias do grande matemático Felix Klein, é proporcionar um estímulo aos professores de Matemática para fazer conexões entre o conteúdo que ensinam e o desenvolvimento da pesquisa em Matemática ao longo do último século e, desse modo, enriquecer suas aulas. Para atingir esse objetivo, vários matemáticos prepararam textos voltados para o professor de Matemática, ressaltando tais conexões.

Neste e nos próximos números da RPM, publicaremos um artigo selecionado entre aqueles produzidos por matemáticos brasileiros e portugueses para o Projeto. Embora na maior parte dos casos o conteúdo dos artigos não seja diretamente aplicável à sala de aula do ensino básico, os editores da RPM acreditam que seus leitores deveriam conhecer essa iniciativa e que a leitura dos artigos vai contribuir para a cultura matemática dos professores e para sua atuação profissional. Todos os artigos do Projeto Klein podem ser encontrados no site do projeto em

<http://klein.sbm.org.br/>.



COMÉRCIO EM UMA CIDADE

Alberto A. Pinto

Telmo Parreira

Universidade do Porto, Universidade do Minho

Como é que os habitantes de uma cidade escolhem lojas para fazer compras?

INTRODUÇÃO

Consideremos uma aldeia em que quase todos os seus moradores vivem ao longo da rua principal, na qual existem apenas duas lojas: a do Manuel e a do Joaquim. Os habitantes da aldeia podem comprar os produtos na loja do Manuel ou do Joaquim.

Identificamos a rua principal com o segmento de reta $[0, L]$ e, para simplificar o modelo, supomos que a loja do Manuel se encontra no ponto 0 do segmento e que a loja do Joaquim se encontra no ponto L , isto é, nos extremos da rua. Denotamos por c_M e c_J os custos unitários de produção para cada vendedor (loja) e por p_M e p_J os preços unitários de venda dos mesmos produtos nas lojas do Manuel e do Joaquim, respetivamente. O Antônio, que vive na casa com o endereço $d \in \{0, 1, 2, \dots, L\}$ na rua, tem o custo $p_M + dt$ se for comprar na loja do Manuel e tem o custo $p_J + (L - d)t$ se for comprar na loja do Joaquim, sendo t o custo unitário de se deslocar numa direcção ou na outra. Antônio decide fazer compras na loja do Manuel ou do Joaquim consoante o custo seja menor. Assim, se

$$p_M + dt < p_J + (L - d)t,$$

Antônio vai comprar na loja do Manuel e se

$$p_M + dt > p_J + (L - d)t,$$

Antônio vai comprar na loja do Joaquim. Esse tipo de competição entre duas empresas (lojas) é descrita pelo modelo de Hotelling ([1], [4]).

Consideremos que cada habitante da aldeia compra uma unidade de produto quando se desloca a uma das lojas. Assim, o número k de unidades vendidas por Manuel é igual ao número de habitantes que vão comprar na sua loja e o seu lucro $k(p_M - c_M)$ é igual ao número de unidades de produto vendidas k vezes o lucro $p_M - c_M$ obtido em cada venda. Os lucros de Joaquim são calculados de forma semelhante. Quais os preços p_M e p_J que Manuel e Joaquim devem praticar para maximizar o seu lucro?

MODELO DE HOTELLING

Para simplicidade das fórmulas que se seguem, passamos a considerar que o endereço $d \in [0, L]$ e que o número de habitantes são reais em vez de inteiros, obtendo, assim, uma solução aproximada do caso da vida real. Deixamos como exercício, para o leitor, ajustar as fórmulas para o caso da vida real em que o endereço e o número de habitantes são inteiros.

Dependendo dos preços p_M e p_J praticados pelas lojas do Manuel e do Joaquim, vamos encontrar o *consumidor indiferente*, que mora na casa com endereço $d_0 \in [0, L]$, que é o habitante da aldeia para o qual o custo de se deslocar até a loja do Manuel e comprar um produto é igual ao custo de se deslocar na loja do Joaquim e comprar o mesmo produto (ver figura 1), isto é:

$$p_M + t d_0 = p_J + t(L - d_0).$$

