PAINEL I

ÁREAS E CONGRUÊNCIAS

Allan Fabossi

Colégio FAAP Ribeirão, Ribeirão Preto, SP

Já faz alguns anos (seis se não me engano) que participo da Jornada Olímpica de Matemática que acontece em São José do Rio Preto, coordenada pelo meu amigo Cláudio Vidal. Ano passado, em uma conversa no meio de um café (que por sinal são excelentes na jornada da OMRP), me ocorreu a seguinte ideia: existe uma interessante relação entre os casos de congruência de triângulos e o cálculo de áreas.

Explico melhor.

O caso de congruência que é aceito como postulado é o LAL, no qual os elementos que determinam a congruência são dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Isso significa que, dados dois segmentos de medidas a e b e um ângulo de medida θ, existe apenas um triângulo que possui tais lados e um ângulo, compreendido entre eles, de medida θ. Ora, se a, b e θ definem um triângulo, eles determinam também sua área e, portanto, deve ser possível calcular a área desse triângulo usando apenas esses dados. E, de fato, isso é possível. Se S representa a área desse triângulo, temos: $S = \frac{1}{2}a.b.\text{sen}\theta.$

De modo análogo, fazemos tal análise para o caso de congruência LLL. Se três lados de um triângulo o determinam, o fazem também com sua área. Nesse caso, temos a expressão conhecida como fórmula de Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo a, b e c as medidas dos lados e p o semiperímetro, $p = (a + b + c)/2$.

PAINEL II

UM MÉTODO DE APROXIMAÇÃO PARA A RAIZ QUADRADA

O leitor Fabiano Gomes Lopes escreveu para a RPM relatando que em 1995, quando cursava a antiga 8ª série do primeiro grau, descobriu uma forma de obter boas aproximações da raiz quadrada de um número N a partir do quadrado perfeito anterior e posterior a N. De acordo com o leitor, se Q_1 é o maior quadrado perfeito menor do que N e Q_2 é o menor quadrado perfeito maior do que N, então $\sqrt{N}$ será aproximadamente igual a

$$\sqrt{Q_1}+\frac{N-Q_1}{Q_2-Q_1}.$$

Por exemplo, se queremos encontrar uma aproximação de $\sqrt{19}$, basta encontrar os quadrados perfeitos que "cercam" o 19 e substituí-los na fórmula. Teremos então, $Q_1 = 16$ e $Q_2 = 25$ e, portanto,

$$\sqrt{19}\approx\sqrt{16}+\frac{19-16}{25-16}=4,\bar{3}.$$

Como $\sqrt{19}\simeq 4,3589$, o erro, por falta, cometido pela fórmula é de aproximadamente $0,0256$.

A fórmula que Fabiano descobriu intuitivamente decorre do método de interpolação linear aplicado à função $f(x)=\sqrt{x}$, como veremos utilizando o gráfico no fim da página.

Observe no gráfico que o valor de $\sqrt{N}$ é aproximadamente igual à ordenada do ponto E, pertencente a AD. Chamando de ε a medida de EF, decorre da semelhança dos triângulos ABE e ACD:

$$\frac{BE}{CD}=\frac{AB}{AC},\text{ ou seja, }\frac{\sqrt{N}-\varepsilon-\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q2}-\sqrt{Q_1}}=\frac{N-Q_1}{Q_2-Q_1}.$$

Sabendo que Q_1 e Q_2 são quadrados perfeitos consecutivos, então $\sqrt{Q_2}-\sqrt{Q_1}=1$ e, portanto,

$$\sqrt{N}-\varepsilon-\sqrt{Q_1}=\frac{N-Q_1}{Q_2-Q_1}.$$

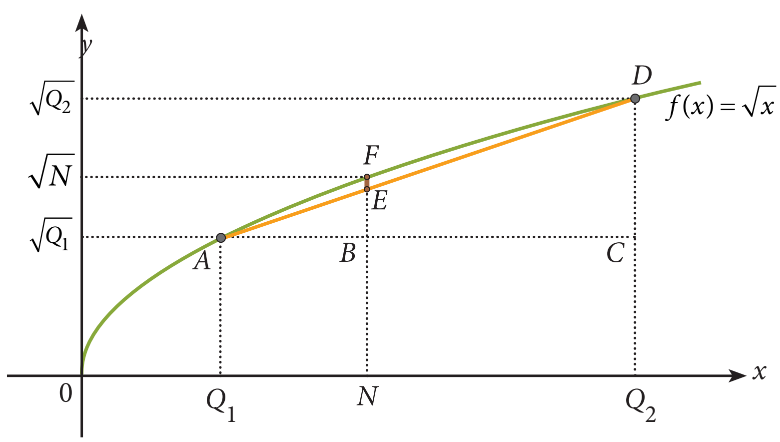
Isolando $\sqrt{N}$, obtemos:

$$\sqrt{N}=\sqrt{Q_1}+\frac{N-Q_1}{Q_2-Q_1}+\varepsilon.$$

Como ε é pequeno, segue:

$$\sqrt{N}\approx\sqrt{Q_1}+\frac{N-Q_1}{Q_2-Q_1}.$$

Como AD é secante ao gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$, e f é uma função crescente a taxas decrescentes, vem que o valor de ε sempre implicará um erro "por falta" na aproximação da raiz por esse método.



PAINEL III

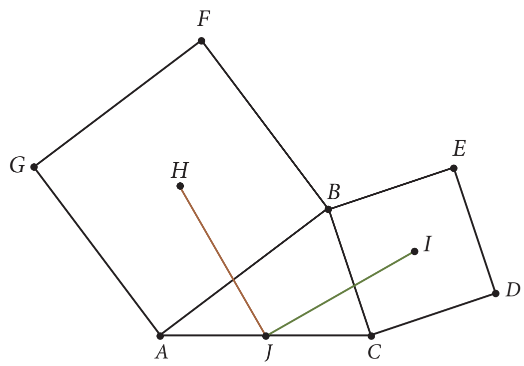
UM BELO PROBLEMA

Tiago Santos da Silva

Sejam ABC um triângulo, $ABFG$ e $BCDE$ quadrados construídos sobre os lados AB e BC. Se H e I são, respectivamente, os centros dos quadrados e J é ponto médio do lado AC do triângulo, então mostre que:

i) $HJ = IJ$.

ii) HJ é perpendicular a IJ.



Solução

i) $HJ = IJ$

De $BF = AB$ e $BC = BE$, temos (ver figura a seguir) que os triângulos FBC e ABE são congruentes (LAL).

Traçando as diagonais AF e EC dos quadrados $ABFG$ e $BCDE$, temos:

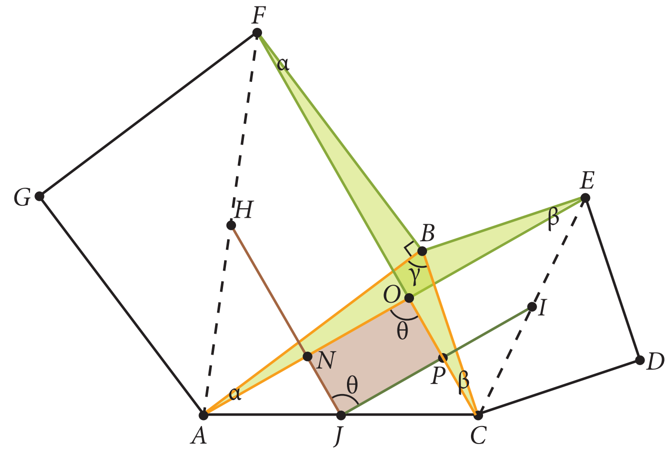
a) HJ é base média do triângulo AFC, ou seja, $HJ = FC/2$.

b) IJ é base média do triângulo ACE, ou seja, $IJ = AE/2$.

Pela congruência dos triângulos FBC e ABE, temos $FC = AE$. Logo, temos $HJ = IJ$.

ii) HJ é perpendicular a IJ

De $IJ // AE$ e $HJ // FC$, temos que o quadrilátero $JNOP$ é um paralelogramo.



a) No quadrilátero $ABCO$: $\theta = \alpha + \gamma + \beta$.

b) No triângulo FBC: $\alpha + \gamma + \beta = 90^o$.

Logo, $\theta = 90^o$ e então HJ é perpendicular a IJ.

PAINEL IV

UMA MÁGICA DESAFIADORA

Rogério César dos Santos – FUP/UnB
Cleyton Hércules Gontijo – UnB

Apresentamos uma atividade lúdica pela qual se pode motivar e solidificar o estudo de equações do primeiro grau.

Sugerimos a realização da mágica em sala de aula a fim de prender a atenção dos alunos para, em seguida, mostrar a Matemática que a explica. Julgamos a mágica desafiadora pelo fato de, aparentemente, o mágico não possuir dados para a sua adivinhação.

A mágica

1) Peça a um aluno voluntário que segure 7 bolinhas (ou qualquer objeto pequeno como tampas ou moedas) e escolha secretamente um número w entre 3 e 7 e, também secretamente, distribua essa quantidade de bolinhas nas mãos (nenhuma mão pode ficar vazia). Suponha, por exemplo, que ele tenha escolhido 4 bolinhas, distribuindo