



artigo



O HEPTADECÁGONO COM RÉGUA E COMPASSO

MIGUEL V. S. FRASSON, ICMC – USP

No começo de meus estudos, contaram-me que havia uma construção com régua e compasso para o polígono regular de curiosos 17 lados. Agora, décadas mais tarde, encontrei-me com o assunto explicado, surpreendi-me que não é nenhum bicho de sete cabeças e gostaria de expô-lo com o máximo de simplicidade, para qualquer um que queira uma bela aventura pelo conhecimento, usando como ferramentas geometrias clássica e analítica, números complexos e trigonometria.

O matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) foi o pioneiro na solução desse problema em aberto desde a antiguidade clássica, tratando-o essencialmente no seu trabalho *Disquisitiones Arithmeticae* [5], dando as ideias em linhas gerais. Esse feito nasceu de seu estudo das raízes da unidade, ou seja, das raízes (complexas) da equação $z^n = 1$, que no plano complexo estão nos vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência unitária. Gauss mostrou como montar uma sequência de equações quadráticas em que os coeficientes de um termo da sequência são expressos por regras simples das raízes das anteriores. No final da sequência, temos as coordenadas de $z \neq 1$ tal que $z^n = 1$, quando n é um produto de primos distintos da forma $p_k = 2^{2^k} + 1$. Ora, os únicos primos dessa forma conhecidos são 3, 5, 17, 257 e 65.537, os chamados primos de Fermat. Como sempre podemos dividir um arco ao meio, podemos construir também as po-

