A equação $x^y = y^x$

Paulo Sérgio Argolo – Rio de Janeiro

1. INTRODUÇÃO

Três amigos, uma equação.

Terça-feira, 29 de junho de 1728. O matemático suíço Daniel Bernoulli (1700–1782) escreve uma carta ao amigo prussiano Christian Goldbach (1690–1764) afirmando, sem contudo apresentar prova, que a equação $x^y = y^x$, com $x < y$, possui uma única solução inteira positiva ($x = 2$ e $y = 4$), mas uma infinidade de soluções racionais. Em sua resposta, Goldbach produz a solução geral que veremos adiante.

Vinte anos depois (1748), em sua preciosa obra *Introductio in analysin infinitorum*, o ilustre matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) abordaria a equação $x^y = y^x$, seguindo estratégia similar à de Goldbach, que era seu amigo íntimo (assim como Bernoulli). Euler, todavia, iria mais adiante na solução geral, que ganharia então uma nova apresentação.

Neste artigo, seguiremos inicialmente, caro leitor, os passos de Goldbach e Euler, e depois avançaremos um pouco mais no tema. Assim, após exibir a solução geral da equação $x^y = y^x$, com x e y reais positivos , veremos como encontrar as soluções racionais positivas e, além disso, mostraremos que a equação admite somente quatro soluções inteiras, sendo duas positivas e duas negativas.

O texto apresenta ainda uma relação entre as soluções racionais de $x^y = y^x$ e o Número de Euler.

Em vez de dizer que $x = a$ e $y = b$ é uma solução de $x^y = y^x$, diremos várias vezes, como é de praxe, que o par ordenado (a, b) é uma solução dessa equação.

$\mathbb{R}$ indicará o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos reais positivos.