

# Construção de funções a partir de problemas geométricos

---

M. Elisa. E. L. Galvão  
IME-USP/UNIBAN

## Atividade introdutória

**Problema:** entre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

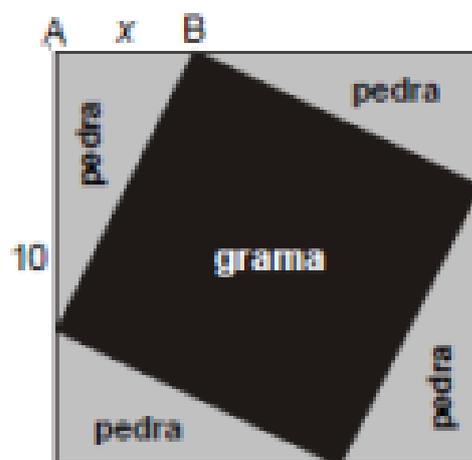
Como podemos representar, por meio de uma função matemática, a área da região retangular e estudar o comportamento dessa função.

Dado o perímetro, podemos também começar, construindo um quadrado e verificando o que acontece com a área à medida que o transformamos em um retângulo com o mesmo perímetro.

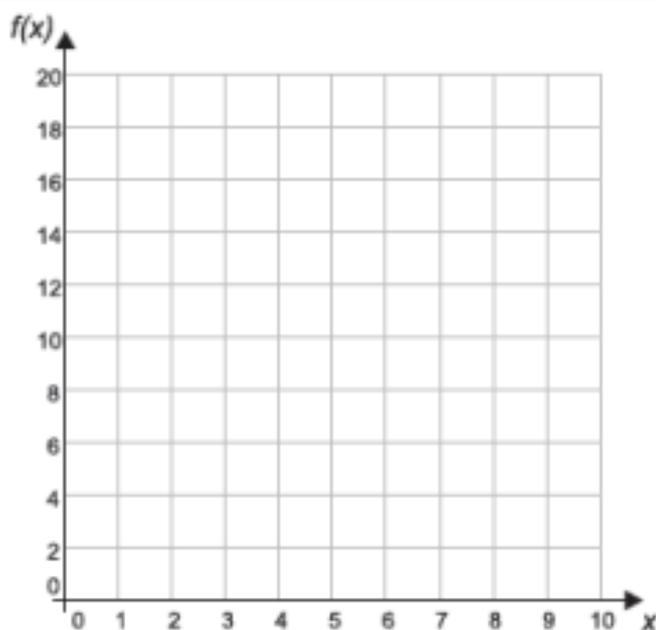
## Atividade 1.

### Problema (OBMEP 2005 - N3- 2ª fase)

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento  $AB$  está indicado por  $x$  na figura.



- Calcule a área do canteiro de grama para  $x = 2$ .
- Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de  $x$  e esboce seu gráfico.



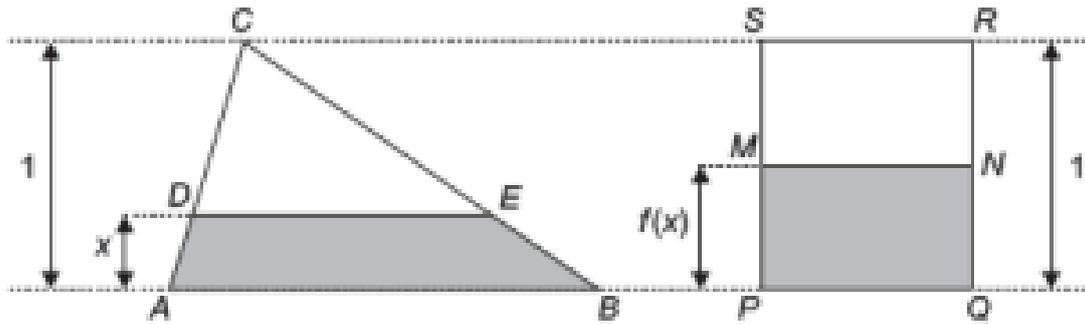
Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

- c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
- d) Se o prefeito tem apenas R\$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

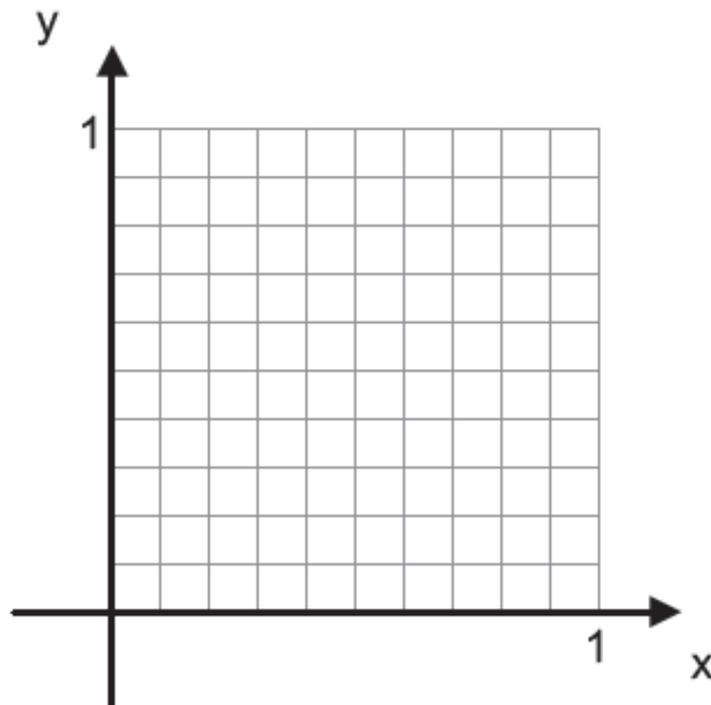
## Atividade 2.

### Problema (OBMEP 2008 - N3-2ª fase)

Na figura, o triângulo  $ABC$  e o retângulo  $PQRS$  têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de  $x$  entre 0 e 1 desenha-se o trapézio  $ABED$  de altura  $x$  e depois o retângulo  $PQNM$  de área igual à do trapézio, como na figura. Seja  $f$  a função que associa a cada  $x$  a altura do retângulo  $PQNM$ .



- Qual é a razão entre  $AB$  e  $PQ$ ?
- Qual é o valor de  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ?
- Ache a expressão de  $f(x)$  e desenhe o gráfico de  $f$ .



### Atividade 3.

#### Observações iniciais:

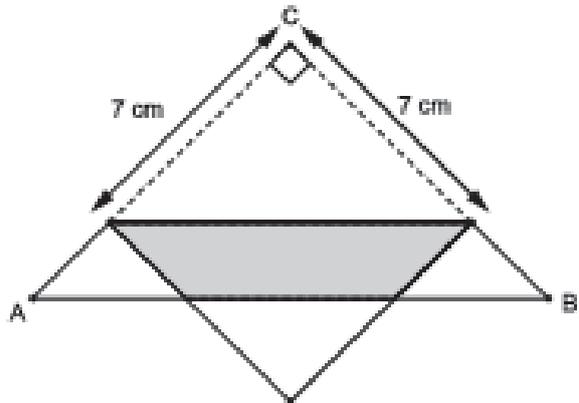
Um **triângulo retângulo isósceles** é um triângulo retângulo cujos catetos têm a mesma medida (isto é, os catetos são congruentes).

#### Propriedades importantes do triângulo retângulo isósceles:

- Esse triângulo é a metade de um quadrado;
- Uma paralela a qualquer dos lados do triângulo retângulo isósceles corta os outros dois lados determinando um novo triângulo retângulo isósceles.

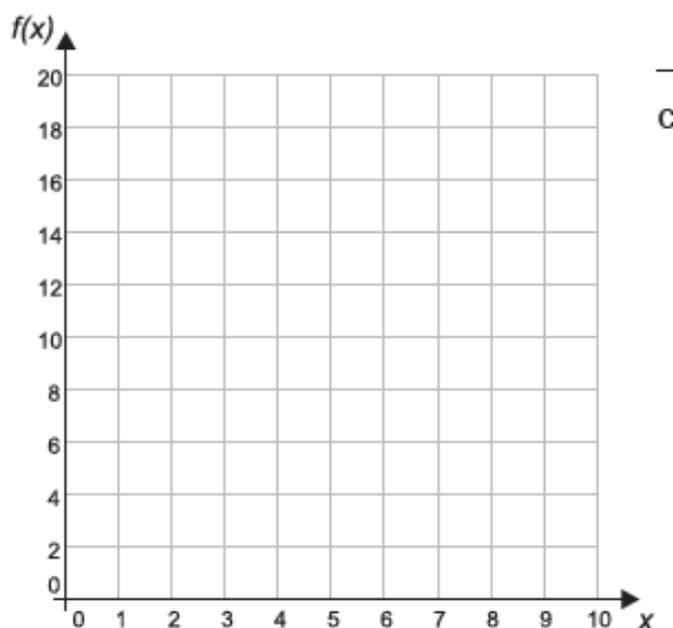
**Problema: (OBMEP 2013 - N3-2ª fase)**

A figura mostra um triângulo de papel  $ABC$ , retângulo em  $C$  e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número  $x$  tal que  $0 \leq x \leq 10$ , marcam-se nos catetos os pontos que distam  $x$  cm do ponto  $C$  e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por  $f(x)$  a área, em  $\text{cm}^2$ , da região onde ocorre sobreposição de papel.



Por exemplo, na figura ao lado, a área da região cinzenta é  $f(7)$ .

- Calcule  $f(2)$ ,  $f(5)$  e  $f(7)$ .
- Escreva as expressões de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 5$  e  $5 \leq x \leq 10$ .
- Faça o gráfico de  $f(x)$  em função de  $x$ .
- Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.



## Atividade 4.

### Problema (OBMEP 2009 - N3- 2ª fase):

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1.

A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita.

Nas figuras 2 e 3,  $x$  indica a distância entre os vértices  $A$  e  $B$  dos dois triângulos.

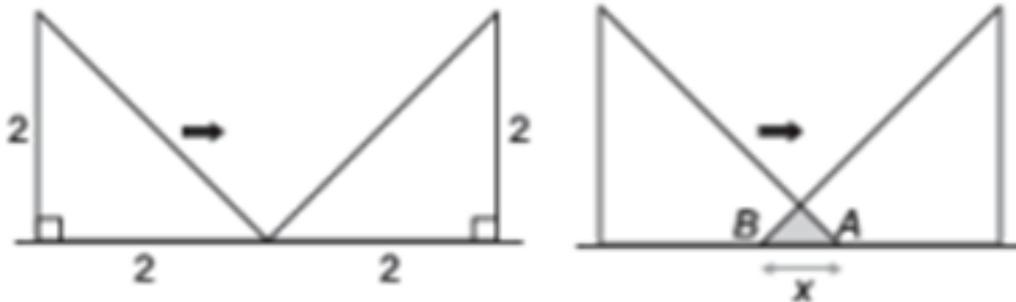


Figura 1

Figura 2

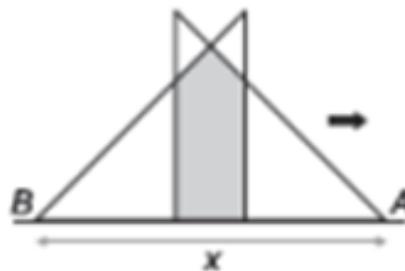
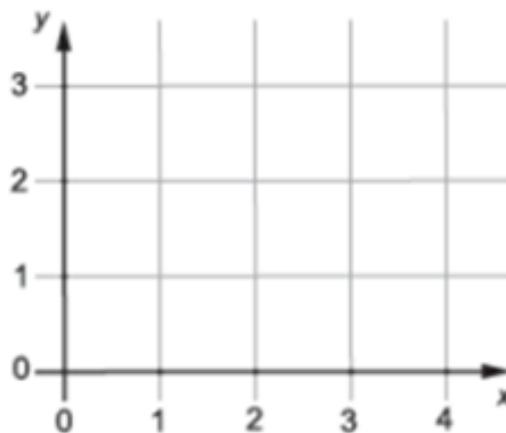


Figura 3

Para cada  $x$  no intervalo  $[0,4]$ , seja  $f(x)$  a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

a) Calcule  $f(1)$  e  $f(3)$ .

b) Encontre as expressões de  $f$  nos intervalos  $[0,2]$  e  $[2,4]$  e esboce o seu gráfico.

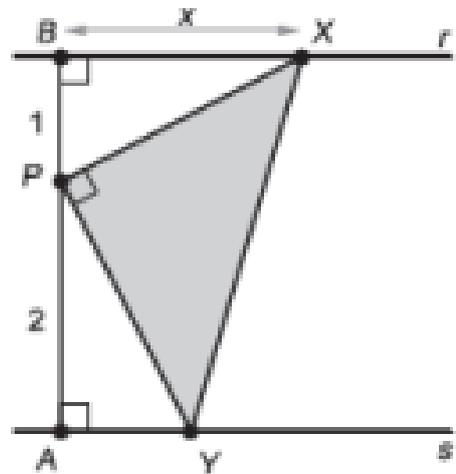


c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

## Atividade 5.

### Problema (OBMEP 2012 - N3 - 2ª fase):

Na figura ao lado, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. O segmento  $AB$  é perpendicular a essas retas e o ponto  $P$ , nesse segmento, é tal que  $AP = 2$  e  $BP = 1$ . O ponto  $X$  pertence à reta  $r$  e a medida do segmento  $BX$  é indicada por  $x$ . O ponto  $Y$  pertence à reta  $s$  e o triângulo  $XPY$  é retângulo em  $P$ .

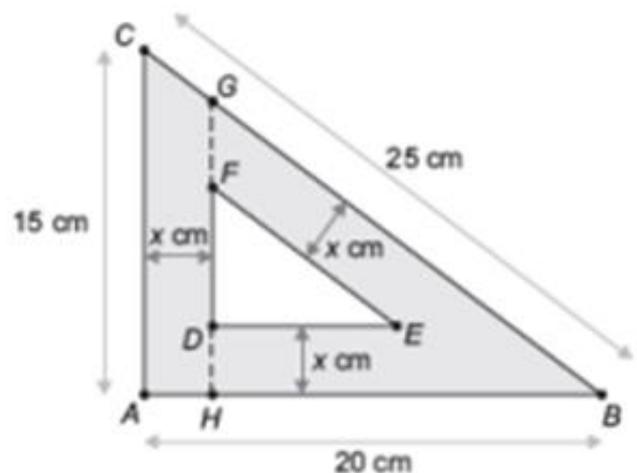


- Explique por que os triângulos  $PAY$  e  $XBP$  são semelhantes.
- Calcule a área do triângulo  $XPY$  em função de  $x$ .
- Para quais valores de  $x$  a área do triângulo  $XPY$  é igual a  $5/2$  ?
- Esboce o gráfico da função área do triângulo  $XPY$ .
- Determine o valor de  $x$  para o qual a área do triângulo  $XPY$  é mínima e calcule o valor dessa área.

## Atividade 6.

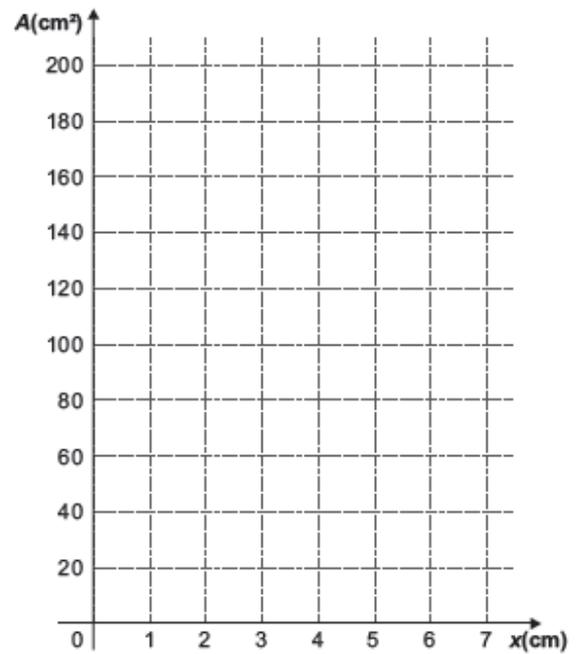
### Problema (OBMEP 2011-N3- 2ª fase):

Na figura, os lados do triângulo  $DEF$  são paralelos aos lados do triângulo retângulo  $ABC$ . Os pontos  $H, D, F$  e  $G$  estão alinhados e  $0 \leq x \leq 5$ .



- Calcule o comprimento de  $GH$  em função de  $x$ .
- Mostre que  $CG = FG = 5x/4$  cm.

c) Faça o gráfico da área  $A$  do triângulo  $DEF$  em função de  $x$ .



### Atividade 7.

Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono  $BCDP$  em função da distância  $x = AP$ ?

Justifique sua resposta.

