# A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico

*Aline dos Reis Matheus*[1]
*Cláudia Cueva Candido*[2]
*2º sem. 2013*

## Introdução

O desenvolvimento do raciocínio lógico é usualmente associado ao estudo da Matemática. No entanto, o cerne da Lógica, enquanto ciência, e do raciocínio dito lógico, é a *argumentação*.

E, é claro, argumentar não é atividade exclusiva da Matemática. Na realidade, a boa argumentação, em âmbitos gerais, depende basicamente da apropriação adequada da língua materna e de estímulos adequados. Argumentar é questão de prática.

De fato, embora não seja possível defender que o estudo da Matemática tenha alguma primazia sobre o desenvolvimento do raciocínio lógico, também não se pode deixar de constatar que a Matemática é realmente um terreno muito promissor para isso. E, por outro lado, sem o uso do raciocínio lógico, é difícil chegar ao cerne das questões Matemáticas.

Porém, o *modo* como a lógica é incorporada na matemática escolar pode definir o sucesso ou insucesso do desenvolvimento da capacidade de argumentar *em Matemática.* É justamente esse ponto que pretendemos discutir nesta oficina.

[1]Educadora no CAEM – IME – USP.
[2] Professora Doutora do Dpto. de Matemática Pura do IME – USP.

## O que é Lógica?

O adjetivo *lógico* é utilizado com frequência no cotidiano, geralmente quando as pessoas querem se referir a algo que parece evidentemente correto. “É lógico que tal coisa deve ocorrer...” - a esse tipo de oração costuma suceder outras como “pois...”. Daí já é possível perceber que à Lógica, como ciência, interessa estudar aquelas afirmações (*conclusões*) que podem ser justificadas por outras (*premissas*), tomadas como ponto de partida. Esse encadeamento de premissas e conclusões recebe o nome de *argumento*.

Historicamente, foi Aristóteles, no século IV a.C., o primeiro a estudar sistematicamente as formas de argumentação, a fim de determinar quando um argumento é *válido* e quando é *inválido*. Seus estudos de Lógica foram reunidos num livro chamado *Organon*.

A Lógica não trata, em princípio, da *veracidade* do conteúdo de uma afirmação, mas da coerência entre as afirmações, isto é, trata da validade do argumento. Por exemplo, no argumento abaixo a conclusão deriva forçosamente das premissas. Ela será verdadeira, desde que as premissas também o sejam. Por esse motivo, diz-se que **o argumento é válido**. Porém, a conclusão *pode* ser falsa, já que uma das premissas o é.

Todos os cachorros são brancos.
Pirueta é um cachorro.
Portanto, Pirueta é branco.

O próximo exemplo é de um argumento inválido. No entanto, as premissas e a conclusão são reconhecidamente verdadeiras.

Todos os paulistas são brasileiros.
O falecido cantor Ray Charles não era paulista.
Logo, Ray Charles não era brasileiro.

Este último exemplo costuma gerar um particular desconforto: a veracidade do conteúdo das afirmações costuma fazer com que as pessoas queiram aceitar o argumento como válido. Porém, mantendo a *forma* e alterando o *conteúdo*, é possível expor a fragilidade da argumentação:

> Todo múltiplo de 4 é um número par.
> 6 não é um múltiplo de 4.
> Logo, 6 não é par.

Na realidade, são inválidos, independentemente de seu conteúdo, todos os argumentos da forma:

> Todo A é B.
> x não é A.
> Então, x não é B.

***Atividade***

**1.** *Decida se os argumentos abaixo são válidos ou inválidos, expondo suas razões. Depois, reformule os argumentos inválidos de modo a se tornarem válidos.*

*a) Produtos importados são caros.*
*O chocolate D'Chon é um produto caro.*
*Logo, o chocolate D'Chon é importado.*

*b) Se o Santos ganhasse, João faria um churrasco.*
*O Santos não ganhou.*
*Logo, João não fará um churrasco.*

*c) Todos os cachorros falam.*
*Todos os seres que falam pensam.*
*Assim, os cachorros pensam.*

Dizemos que um argumento é *sólido* se ele é válido e conduz a uma conclusão verdadeira. É o caso do exemplo:

> Todos os múltiplos de 6 são múltiplos de 3.
> 144 é um múltiplo de 6.
> Logo, 144 é múltiplo de 3.

**Lógica na aula de Matemática X Lógica na Matemática**

Muitas vezes, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico, os professores de Matemática trabalham com problemas ou desafios de lógica. A seguir, há um exemplo desse tipo de desafio.

**"Calote no museu"**

> Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar o ingresso. Mas o guarda do museu descobre que um dos quatro amigos não pagou sua entrada e, quando ele pergunta quem foi, recebe as seguintes respostas:
>
> - Eu não fui, diz Benjamim.
> - Foi o Pedro, diz o Carlos.
> - Foi o Carlos, diz o Mário.
> - O Mário não tem razão, diz Pedro.
>
> Só um deles mentiu. Quem não pagou bilhete?

***Atividades***

**2.** *Resolva o desafio "Calote no museu".*

**3.** *Reflita, discuta com seus colegas e registre.*

*a) O desafio requer do aluno a argumentação?*

*b) Esse desafio mobiliza conteúdos matemáticos? Quais?*

*c) Esse desafio estimula habilidades importantes para a Matemática? Quais?*

*d) Ao trabalhar com esse tipo de desafio, o aluno torna-se mais capaz de argumentar em Matemática?*

*e) Esse desafio poderia ser proposto em outra disciplina que não a Matemática? Qual ou quais? Por quê?*

Certamente, problemas de lógica contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e, possivelmente, propô-los em alguns momentos de um curso de Matemática gera agradáveis quebras de rotina, desde que o nível de dificuldade esteja adequado aos alunos - nem fácil demais, nem difícil demais. Porém, esse tipo de problema não guarda relação especial com conteúdos matemáticos e não favorece, por si só, que os alunos argumentem *em Matemática*. É comum, inclusive, que a despeito da eficiente resolução de problemas de lógica, alguns alunos não vejam lógica na Matemática - cujas definições, processos e resultados muitas vezes lhes parecem arbitrários.

Segundo as pesquisadoras do Projeto Fundão, da UFRJ, [7]:

> *" [...] Os alunos raramente vêem demonstrações, e tampouco se pede que eles justifiquem suas respostas, ou a verdade de uma afirmativa. Isso acontece tanto no ensino de geometria, como no de álgebra e de aritmética. Em geometria, apresentam-se aos alunos definições prontas, que devem ser repetidas, e fórmulas para serem simplesmente aplicadas em problemas estereotipados. Nas aulas de álgebra e de aritmética, o ensino se dá com ênfase nos procedimentos: manipulação de expressões, resolução de equações, aplicação de regras, aos quais os alunos não atribuem significado algum."*

A equipe do Projeto Fundão pesquisou a qualidade da argumentação que alunos de vários anos escolares, a partir de 11 anos de idade, são capazes de usar em Matemática. Uma das questões respondidas pelos alunos foi:

> *"Verifique se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa, e justifique sua resposta: quando você soma dois números pares, o resultado é sempre um número par."*

Todos os alunos de 8º e 9º ano responderam corretamente que a afirmação é verdadeira, mas nenhum conseguiu justificar isso. Na melhor das hipóteses, esses alunos forneceram alguns exemplos.

***Atividades***

**4.** *Explique o fato de que a soma de dois números pares é sempre par, usando:*

*a) a linguagem natural.*

*b) um desenho, esquema ou diagrama.*

*c) a linguagem algébrica.*

**Dedução e indução**

Argumentos que podem ser classificados como válidos ou inválidos de modo inequívoco, são chamados de *argumentos dedutivos*. Mas existem também *argumentos indutivos*. As próximas atividades são um aquecimento para a discussão dos papéis que esses dois tipos de argumento têm na Matemática.

***Atividades***

**5.** *Compare os dois argumentos, registrando as diferenças observadas.*

*I. Joaquina nasceu em Cacilhas.*
*Todos os que nascem em Cacilhas são portugueses.*
*Logo, Joaquina é portuguesa.*

*II. Os sapos que já vi ao vivo eram todos verdes.*
*Os sapos que vi representados em livros, tanto em gravuras quanto em fotografias, eram verdes.*
*Portanto, todos os sapos são verdes.*

**6.** *Verdadeiro ou falso? Justifique.*

*a) Num conjunto de três números inteiros consecutivos, sempre haverá um múltiplo de três.*

*b)* $n^2+n+41$ *resulta em um número primo para qualquer valor natural de n.*

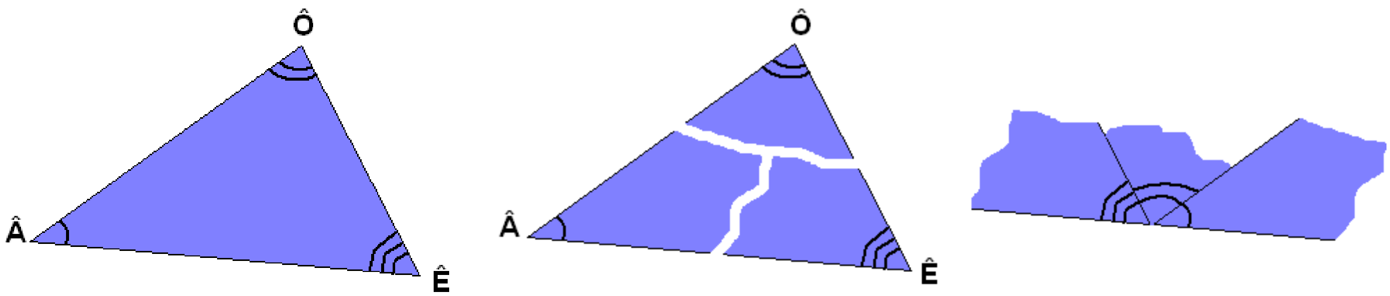
*c) As bissetrizes dos ângulos agudos de qualquer triângulo retângulo formam um ângulo de 135°.*

**7.** *Imagine um tabuleiro de xadrez (8x8), de onde foram retiradas duas quinas opostas, tal como na ilustração - diremos que é um tabuleiro de xadrez "mutilado". Suponha ainda que você disponha de 31 peças de dominós, cada uma capaz de cobrir duas casas do tabuleiro de xadrez. Com essas 31 peças é possível cobrir todas as 62 casas do tabuleiro de xadrez mutilado? Se sim, mostre como. Se não, explique o porquê.*

Num argumento dedutivo, o movimento é do geral para o particular. Desse modo, num argumento dedutivo válido, a veracidade das premissas conduz *necessariamente* à veracidade da conclusão. Já no raciocínio indutivo, parte-se de casos particulares em busca de uma generalização. Nesse tipo de argumento, não se pode ter certeza da veracidade da conclusão, mesmo que as premissas sejam verdadeiras. A conclusão pode ser considerada meramente provável, sendo que essa probabilidade é geralmente atrelada à quantidade e qualidade dos dados disponíveis. Boa parte dos avanços científica acontece por meio de argumentos indutivos: são recolhidos resultados de experimentações e, com base neles, é produzido um modelo geral explicativo para um dado fenômeno. No entanto, fatos novos e imprevistos podem exigir a reformulação desse modelo.

***Atividades***

**8.** Para apresentar a soma dos ângulos internos de um triângulo, é muito comum que os professores proponham alguma atividade baseada nas imagens que seguem:




*a) Como você conduziria tal atividade?*

*b) Qual dos tipos de raciocínio essa atividade permite explorar: indutivo ou dedutivo?*

**9.** *Demonstre – isto é, argumente dedutivamente – que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°. (Dica: defina seu "ponto de partida", que poderia ser, por exemplo, o que você sabe sobre os ângulos formados por duas paralelas e uma transversal.)*

**Argumentação em Matemática**

Aos matemáticos cabe, dentre outras, a tarefa de descobrir novos resultados matemáticos. Os processos de descoberta podem ser bastante diversificados, mas, invariavelmente, os matemáticos precisam expor os motivos pelos quais julgam que seus resultados são válidos. Isso é, precisam *demonstrar* ou *provar* a validade de tais resultados, que passam então a se chamar *teoremas*.

Demonstrar teoremas é importante porque muitas afirmações matemáticas que parecem óbvias, podem ser, na realidade, falsas – a história está cheia de exemplos. Mas demonstrar teoremas é também uma maneira de compreendê-los mais profundamente: saber não apenas que são válidos, mas também *porque* são válidos.

***Atividades***

**10.** *As afirmações que se admitem verdadeiras numa demonstração matemática são as hipóteses e a afirmação se deseja provar é chamada tese. Identifique hipótese e tese na demonstração abaixo.*

*Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ..., $a_n$ os n primeiros termos de uma PG de razão q ($q \in IR^*$ e $q \neq 1$). Indicaremos a soma desses termos por $S_n$. Temos então:*

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$ *(1)*

*Multiplicando essa igualdade por q, temos:*

$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + qa_4 + ... + qa_{n-1} + qa_n$

*Mas é claro que, numa PG,* $qa_k = a_{k+1}$. *Portanto:*

$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n + a_{n+1}$ *(2)*

*Subtraindo (1) de (2), temos:*

$qS_n - S_n = a_{n+1} - a_1$

$(q - 1) S_n = q^n a_1 - a_1$

$(q - 1) S_n = a_1 (q^n - 1)$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

**11.** *Leia as afirmações:*

*Se n é um número natural par, então $n^2$ também é par.*

*Se $n^2$ é um número natural par, então n também é par.*

*a) Existe diferença entre essas afirmações? Qual é a hipótese e qual é a tese em cada uma delas?*

*b) Demonstre ambas as afirmações.*

A demonstração comumente apresentada no item c da última atividade é chamada *demonstração por absurdo* ou contradição. Nesse tipo de demonstração, supõe-se a negação da tese e, a partir daí, demonstra-se que isso conduziria a um absurdo.

Esse tipo de demonstração é indispensável nos casos em que a demonstração direta não é possível. Por exemplo, como demonstrar que o conjunto dos números primos é infinito? A saída é supor que ele não o seja. Se assim fosse, seria possível tomar P = $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_k\}$ como o conjunto finito de todos os números primos. Então, basta analisar o número $n = p_1p_2p_3...p_k+1$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, fica garantido que $n$ pode ser decomposto de maneira única em fatores primos. Porém, $n$ não é divisível por nenhum elemento de P (o resto é sempre 1). Mas, nesse caso, $n$ também não é divisível por nenhum outro número, a não ser 1 ou ele próprio. Ou seja, $n$ é primo. Isso contraria a hipótese de que P é finito. Logo, P só pode ser infinito.

## Demonstrações matemáticas na escola

Na matemática escolar, há muitos fatos cujas demonstrações são frequentemente deixadas de lado, por diversos motivos. Às vezes o professor não considera que seja importante que o aluno saiba porque certos fatos são válidos, às vezes os próprios alunos não aprenderam a valorizar esse tipo de saber. Outras vezes, o professor acredita que compreender a justificativa é difícil demais para seus alunos. Ou acontece de o professor avaliar que não há tempo para isso, pois o currículo é extenso e, geralmente, seu trabalho será avaliado pelo que os alunos conseguem aplicar, muito mais do que pelo que conseguem justificar.

Debater todas as problemáticas envolvidas nessa questão extrapola as possibilidades deste trabalho. No entanto, pelo exposto até o momento, é forçoso admitir que *um ensino de Matemática que pretenda estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico precisa, necessariamente, lidar com explicações, justificativas* *e demonstrações dos fatos matemáticos* – respeitando o estágio cognitivo dos alunos e os estimulando a avançar.

A teoria de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico pode servir também como diretriz para compreensão dos diversos estágios cognitivos dos alunos no que diz respeito ao raciocínio lógico. Segundo NASSER e TINOCO [5],

> *"No primeiro nível (visual), o julgamento é baseado na observação, e não faz sentido pedir justificativas. No nível seguinte, o raciocínio é analítico, na medida em que o aluno observa propriedades e elementos da figura, mas não estabelece relações entre elas. Já no terceiro nível, o aluno percebe quando uma propriedade é consequência de outra, isto é, ele entende que há uma cadeia de relações entre as figuras e suas propriedades. O processo dedutivo é dominado no nível seguinte, quando os alunos conseguem compreender uma prova formal.*
>
> *De acordo com van Hiele, o progresso entre os níveis ocorre através de experiências especificamente planejadas, e o papel do professor é essencial, pois cabe a ele preparar e ordenar as atividades que o aluno deve vivenciar para progredir de nível. Ele também ressalta que, para haver aprendizagem significativa, é necessário que o ensino e a linguagem utilizadas estejam de acordo com o nível de raciocínio da turma.*
>
> *O modelo de van Hiele tem estreita ligação com a habilidade de justificar em Matemática. Nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e, portanto, vêem a prova como desnecessária. Portanto, um trabalho no sentido de desenvolver habilidades de argumentação e provas facilita o alcance do terceiro nível. Senk (1989) encontrou uma alta correlação entre os níveis de van Hiele atingidos, o desempenho em resolver problemas geométricos, e a habilidade de escrever provas em geometria.*
>
> *Diante desses argumentos e dos resultados preliminares encontrados, pode-se constatar que é necessário ajudar o aluno a desenvolver seu raciocínio lógico, e prepará-lo para dominar o processo dedutivo. A habilidade de argumentar deve ser 'construída' ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades*

*variadas como jogos, problemas desafio, ou simplesmente exigindo justificativas para todas as respostas."*

***Atividades***

**12.** *Dois alunos de 7º ano discutem sobre o seguinte. Um deles diz que quadrados são retângulos e o outro rebate dizendo que quadrados e retângulos são figuras diferentes. Como você interviria na discussão?*

**13.** *Como você responderia a um aluno de 8º ano que lhe perguntasse porque todo número (não nulo) elevado a zero resulta em 1? O que ele precisaria saber para compreender sua resposta?*

**14.** *Como você justificaria para turmas de 9º ano a fórmula para o cálculo da área de um círculo? É possível dar uma demonstração rigorosa desse fato para alunos nessa etapa da escolaridade? Os próprios alunos seriam capazes de descobrir a fórmula em questão?*

**15.** *Você sabe porque é válido o Teorema de Pitágoras? Enuncie e depois demonstre esse teorema. (Há muitas maneiras distintas de provar esse resultado, usando diferentes "pontos de partida". Em 1940, o matemático americano Elisha Scott Loomis compilou 367 demonstrações diferentes para o seu livro 'The Pythagorean Proposition'.)*

Para elaborar atividades especificas com a finalidade de ajudar os alunos a avançarem e para analisar e avaliar os resultados dessas atividades, é interessante ter em mente uma classificação prévia dos tipos possíveis de justificativas e argumentações. Ainda que não seja completa, a classificação a seguir pode ser útil:

**Análise não exaustiva de casos particulares:** o aluno se vale de um raciocínio indutivo: generaliza a partir de casos particulares. Porém, os casos não cobrem todas as possibilidades (muitas vezes, devido á própria natureza do problema).

**Análise exaustiva de casos particulares:** o aluno analisa todos os casos particulares possíveis para uma determinada situação, seja porque o problema só permite essa abordagem, seja porque ele não é capaz de perceber princípios gerais unificadores.

**Recorrência à autoridade:** o aluno afirma que o resultado é válido porque está no livro ou porque o professor falou.

**Exemplo crucial:** o aluno desenvolve o raciocínio por meio de um exemplo, mas poderia tê-lo feito, da mesma forma, para o caso geral.

**Justificativa gráfica:** o aluno usa uma figura para mostrar que o resultado é verdadeiro.

**Argumentação informal:** o aluno faz um encadeamento de raciocínios, de forma palusível, porém não rigorosa.

**Prova ou demonstração:** o aluno argumenta dedutivamente em favor do resultado.

***Atividades***

**16.** *Qual é o retângulo de perímetro P com maior área? Justifique usando três diferentes tipos de argumentação.*

**17.** *Discuta com seu grupo como as diferenças entre os enunciados modificam a atividade.*

*a) Se p/q = 1, então p – q = .........., porque........................................................................ .*

*b) O quociente de dois números naturais é 1. Qual é a diferença entre eles? Justifique.*

**18.** *Roberto: Pense num número natural!*

*Flávia: Pensei.*

*Roberto: Multiplique o antecessor pelo sucessor do número pensado.*

*Flávia: Feito.*

*Roberto: Agora, some dois ao resultado. Quanto deu?*

*Flávia: 26.*

*Roberto: Ahá! Você pensou no número 5.*

*Flávia: Puxa! Você acertou!*

*Explique o truque do Roberto.*

**19.** *Reflita e registre: qual é o papel da linguagem algébrica para que o aluno avance no desenvolvimento de seu raciocínio lógico?*

**Considerações finais**

A Lógica é uma ciência que trata, sobretudo, da argumentação. Isso significa, em resumo, que a Lógica trata da validação de conclusões. Um argumento dedutivo, por exemplo, só é válido se suas premissas têm com sua conclusão uma relação de necessidade: admitindo as premissas como verdadeiras, é necessário admitir também a veracidade da conclusão. Isso implica que *explicar*, *justificar* e *demonstrar* conclusões são ações de grande importância no desenvolvimento do raciocínio lógico, aconteçam elas dentro ou fora da Matemática.

Já a Matemática, como ciência, se fundamenta como um extenso edifício lógico-dedutvo, embora outros tipos de raciocínio (como o indutivo, por exemplo) e diversas outras habilidades (senso numérico e espacial, organização, imaginação etc) sejam necessários à sua construção. O estudo da Matemática só contribui efetivamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico na exata medida em que os fatos matemáticos apresentados são logicamente justificados e que os alunos são convocados a explicar seus raciocínios, justificar suas conclusões e demonstrar, eles próprios, fatos matemáticos. E, por outro lado, essas ações contribuem para uma compreensão significativa dos fatos matemáticos.

Não se trata aqui de defender uma volta ao tempo em que Matemática escolar era feita todo o tempo de demonstrações formais, pois estas, boa parte das vezes, desrespeitavam as fases do desenvolvimento cognitivo dos alunos. Trata-se, na verdade, de defender um modo de ensinar que acolha e até mesmo provoque o questionamento dos alunos. Trata-se de defender que o professor explique não apenas o *como*, mas o *porquê*, que justifique os fatos matemáticos apresentados, que os demonstre. Ou que, na impossibilidade de fazê-lo, ao menos explicite essa impossibilidade e ofereça justificativas informais ou parciais. Trata-se de defender também um ensino de Matemática que estimule os alunos a justificarem eles próprios seus raciocínios, primeiro informalmente e, mais tarde, com maior nível de rigor. Apenas desse modo será legítimo afirmar que a Matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

**Bibliografia**

[1] ABUD, Z. I. **O raciocínio lógico e a Matemática**. In: MOSTRA DO CAEM, 1, 2007, São Paulo, *Apostilas...* São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2007.

[2] DRUCK, I. F. **A linguagem lógica**. In: Revista do Professor de Matemática nº 17. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[3] FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[4] MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. **Lógica e linguagem cotidiana - verdade, coerência, comunicação, argumentação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[5] NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

[6] VALENTE, W.R. (org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** Brasília: Editora UNB, 2004.

[7] TINOCO, L.; SILVA, M. M. **Argumentação no ensino da Matemática**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - SBEM. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

[8] *Site* E-Cálculo: http://ecalculo.if.usp.br/. Consultado em Maio de 2012.